8.3 스핀 각운동량 (Spin Angular Momentum)

8.1절에서 우리는 각운동량이 가질 수 있는 값이 정수뿐만 아니라 반정수도 허용됨을 보았다. 그러나 궤도 각운동량의 경우 앞 절에서 언급한 바와 같이 정수만 허용된다. 때문에 궤도 각운동량으로 설명할 수 없는 다른 종류의 각운동량이 존재하여야 함을 짐작할 수 있다. 1922년 슈테른(O. Stern)과 게를라흐(W. Gerlach)는 슬릿으로 집속시킨 중성의 은(silver) 원자 빔을 비균질한(inhomogeneous) 자기장 속으로 통과시킨 결과 두 개의 성분(선)으로 분리되는 것을 관찰한 바 있다. 고전적인 해석에 따르면 자기장을 통과한 은 원자 빔이 연속적으로 분포되어야 하는데, 빔이 단지 두 개의 성분(선)으로 분리되는 것은 은 원자의 최외각 전자의 각운동량 값이 $\frac{1}{2}$ 이 되어야 함을 의미한다. 이처럼 궤도 각운동량으로 해석할 수 없는, 입자가 가지는 본원적인 고유의 각운동량(intrinsic angular momentum)을 우리는 스핀 각운동량(spin angular momentum)이라고 하며 흔히 $\overrightarrow{S}$ 로 표시한다. 이미 8.1절에서 배웠다시피 각운동량의 기본 단위는 $\hbar$ 이다. 빛(전자파)의 기본 알갱이로 우리가 배운 광자(photon)는 질량도 없으며, 크기도 없지만, 광자의 스핀 각운동량 값은 $1\hbar$이며 이미 언급한 전자의 각운동량은 $\frac{1}{2}\hbar$이다. 전자의 경우도 내부 구조가 없다고 여기기 때문에 광자의 경우와 마찬가지로 점이라고 우리는 현재 생각한다. 그러므로 이러한 스핀 각운동량은 회전축으로부터 거리가 영이 아닌 경우에만 존재 가능한 궤도 각운동량으로는 해석이 불가능하다. 때문에 스핀 각운동량의 상태는 공간 좌표의 함수로 기술되지 않음에 특히 주의하여야 할 것이다. 그러면 스핀 각운동량은 추상적인 개념인가? 그렇지 않다. 예컨대, 분자가 맨 처음에 각운동량이 영인 정지 상태에 있다가 광자를 흡수한 후 각운동량을 갖게 되어 회전하는 경우가 실제 관측되기 때문이다. 즉, 스핀 각운동량은 물리적으로 측정 가능한 실질적인 양이다.

이제 8.1절에서 각운동량에 대하여 얻은 결과들을 스핀 각운동량의 경우에 적용해 보자. 스핀 각운동량을 $\overrightarrow{S}$ 로 표시하면, 8.1절의 결과는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\overrightarrow{S}^2\phi_{s,m} = s(s+1)\hbar^2\phi_{s,m},$$
$$S_z\phi_{s,m} = m\hbar\,\phi_{s,m}, \quad -s \le m \le s.$$

이제 $s=\frac{1}{2}$ 인 경우에 대하여 생각하면, 첫 번째 식은 $\overrightarrow{S}^2\phi_{s,m} = \frac{3}{4}\hbar^2\phi_{s,m}$ 이 되고, 1절에서 m은 $j, j-1, \cdots, -j+1, -j$의 값을 가졌으므로, 두 번째 식에서 m 은 $\frac{1}{2}$과 $-\frac{1}{2}$ 만을 갖는다. 이제 표기의 편의를 위하여 $|s=\frac{1}{2}, m=\frac{1}{2}>$ 인 상태를 $|\alpha>$, $|s=\frac{1}{2}, m=-\frac{1}{2}>$ 인 상태를 $|\beta>$라고 하자. 그러면 두 번째 식은 $S_z|\alpha> = \frac{\hbar}{2}|\alpha>$ 와 $S_z|\beta> = -\frac{\hbar}{2}|\beta>$ 로 쓸 수 있다. 앞에서처럼 올림과 내림 연산자를 $S_\pm = S_x \pm iS_y$

로 정의하면, $|\alpha>$ 와 $|\beta>$ 는 각각 가장 높고 낮은 상태에 해당하기 때문에 $S_+|\alpha>=0, S_-|\beta>=0$ 임을 짐작할 수 있다. 실제로 각각의 (s,m) 값들을 앞에서 얻은 공식 $S_\pm|s,m> = \hbar\sqrt{s(s+1)-m(m\pm1)}|s,m\pm1>$ 에 대입하면 우리는

$$S_+|\alpha>=0,$$
$$S_+|\beta>=\hbar|\alpha>,$$
$$S_-|\alpha>=\hbar|\beta>,$$
$$S_-|\beta>=0$$

을 얻는다. 이제 S_z 와 $S_\pm$ 의 행렬표현을 구해보자. 이를 위해서 S_z 의 고유상태인 $|\alpha>$ 와 $|\beta>$ 가 기저로 주어지는 행렬표현을 생각하여 보겠다. 이 경우 S_z 와 $S_\pm$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$S_z = \begin{pmatrix} <\alpha|S_z|\alpha> & <\alpha|S_z|\beta> \\ <\beta|S_z|\alpha> & <\beta|S_z|\beta> \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-\hbar}{2} \end{pmatrix},$$

$$S_+ = \begin{pmatrix} <\alpha|S_+|\alpha> & <\alpha|S_+|\beta> \\ <\beta|S_+|\alpha> & <\beta|S_+|\beta> \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \hbar \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$S_- = \begin{pmatrix} \langle\alpha|S_-|\alpha\rangle & \langle\alpha|S_-|\beta\rangle \\ \langle\beta|S_-|\alpha\rangle & \langle\beta|S_-|\beta\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \hbar & 0 \end{pmatrix}.$$

그러므로 $S_x = \frac{1}{2}(S_+ + S_-)$, $S_y = \frac{1}{2i}(S_+ - S_-)$ 의 관계를 사용하면 우리는

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

를 얻는다. 여기서 $\vec{S} \equiv \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$ 로 놓으면 우리는 파울리 행렬(Pauli matrices)이라 불리는 다음의 세 행렬을 얻는다.

$$\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)\ ;\ \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

이제 S_z 의 고유상태인 $|\alpha>$ 와 $|\beta>$는 두 성분을 갖는 열벡터(columm vector)들로 표시되는데, 이러한 스핀 각운동량 $\frac{1}{2}$ 의 고유상태를 우리는 스피너(spinor)라고 부른다.

$$|\alpha> = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ |\beta> = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

참고로 파울리 행렬은 다음의 성질들을 만족한다.

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = I \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_i\sigma_j = -\sigma_j\sigma_i \quad \text{for } i \neq j.$$

이를 합하여 우리는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$\{\sigma_i, \sigma_j\} = \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij}$.
그리고 각운동량의 교환관계식과 동치인 다음의 관계가 성립한다.
$[\sigma_i , \sigma_j] = 2i\,\epsilon_{ijk}\,\sigma_k$

각운동량은 에르미트 연산자(hermitian operator)이므로 $\vec{S} \equiv \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$ 의 관계로부터 $\sigma_i = \sigma_i^+$ 임을 짐작할 수 있는데 이는 쉽게 확인할 수 있다. 그리고 다음의 관계식들도 쉽게 확인할 수 있다.

$$\det(\sigma_i) = -1 , \quad tr\,\sigma_i = 0, \quad (\vec{\sigma} \cdot \vec{a})(\vec{\sigma} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + i\,\vec{\sigma} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

맨 나중의 관계식은 다음과 같이 확인할 수 있다.

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{a})(\vec{\sigma} \cdot \vec{b}) = \sigma_i a_i \sigma_j b_j = \sigma_i\sigma_j a_i b_j = (\frac{1}{2}\{\sigma_i,\sigma_j\} + \frac{1}{2}[\sigma_i,\sigma_j])a_i b_j = (\delta_{ij} + i\,\epsilon_{ijk}\sigma_k)a_i b_j$$
$$= \vec{a} \cdot \vec{b} + i\,\sigma \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

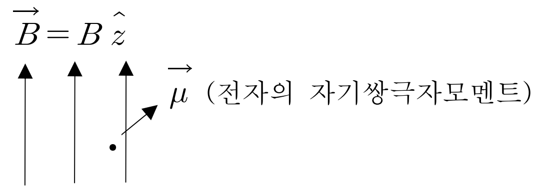
그리고 흔히 사용하는 다음의 관계식들도 위 관계식으로부터 나온다.

$$(\vec{\sigma} \cdot \hat{n})(\vec{\sigma} \cdot \hat{n}) = \hat{n} \cdot \hat{n} + i\,\vec{\sigma} \cdot (\hat{n} \times \hat{n}) = 1 ,$$
$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{a})(\vec{\sigma} \cdot \vec{a}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + i\,\vec{\sigma} \cdot (\vec{a} \times \vec{a}) = \vec{a} \cdot \vec{a} ,$$
$$(\vec{\sigma} \cdot \hat{n})^n = \begin{cases} 1, & n = \text{짝수} \\ \vec{\sigma} \cdot \hat{n} , & n = \text{홀수} \end{cases} .$$

이제 이 절에서 구한 스핀 각운동량의 특성을 일정한 자기장 내에서 일어나는 전자의 세차운동(precession)의 경우에 적용하여 보자.
자기장 내에 존재하는 자기쌍극자모멘트(magnetic dipole moment)의 에너지는 $-\vec{\mu} \cdot \vec{B}$ 로 주어진다. 여기서 $\vec{\mu}$ 는 전자의 자기쌍극자모멘트이고, $\vec{B}$ 는 자기장이다. 여기서 다른 상호작용이 없다고 가정하면, 해밀토니안은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$H = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

이제 z-축에 평행한 균일하고 일정한(constant) 자기장 $\vec{B} = B\hat{z}$ 이 주어졌다고 하고, 전자의 자기쌍극자모멘트 $\vec{\mu}$ 에 대하여 $\vec{\mu} = -\mu_b\vec{\sigma}$ 의 관계를 적용하면(전자의 자기쌍극자모멘트는 스핀에 비례하는데, $\vec{\mu} = \frac{e}{mc}\vec{S} \equiv -\mu_b\vec{\sigma}$ 로 주어진다.



그림[8.3] 자기장내의 전자

여기서 $\mu_b = \frac{|e|\hbar}{2m_e c}$ 이며 이를 보어 자기량(Bohr magneton)이라고 한다.) 해밀토니안은 다음과 같이 주어진다.

$$H = \mu_b\vec{\sigma} \cdot \vec{B} = \mu_b\sigma_z B$$

그러므로 슈뢰딩거 방정식 $H\psi = i\hbar \frac{d\psi}{dt}$ 는 H 가 스핀 각운동량 연산자를 포함하므로 상태함수를 시간의 함수인 스피너 $\xi(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$ 로 표시하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mu_b B \sigma_z \xi(t) = \mu_b B \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} = i\hbar \begin{pmatrix} \dot{a} \\ \dot{b} \end{pmatrix}$$

여기서 $\dot{a} = \frac{da}{dt}$ 를 의미한다. 참고로 $\xi(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} = a(t)|\alpha> + b(t)|\beta>$ 임을 기억하자. 이제 위의 슈뢰딩거 방정식은 아래의 두 방정식으로 쓸 수 있다.

$$\mu_b B a(t) = i\hbar \frac{da}{dt}\ , \quad -\mu_b B b(t) = i\hbar \frac{db}{dt}$$

여기서 $\Omega \equiv \frac{2\,\mu_b B}{\hbar} = \frac{|e| B}{m_e c}$ 로 놓으면, 위 방정식들의 해들은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$a(t) = a(0) e^{-i\frac{\Omega}{2}t}, \quad b(t) = b(0)\, e^{i\frac{\Omega}{2}t}\ .$$

여기에 초기 조건이 주어지면 우리는 임의의 시간에 대한 스피너 상태를 구할 수 있다.
만약 $t=0$ 일 때 전자의 스핀이 $+y$ 방향을 향하고 있었다면

$$\xi(t=0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

로 주어진다. 참고로 위의 결과는 다음과 같이 구할 수 있다. 전자의 스핀이 $+y$ 방향을 향하고 있다는 것은 스피너가 스핀 각운동량 y-성분 연산자 S_y 의 양의 고유값을 갖는 고유상태임을 의미한다. 즉, $t=0$ 일 때 전자의 스피너 $\xi(0)$ 는 $S_y\, \xi(0) = \frac{\hbar}{2}\xi(0)$ 을 만족해야 한다. 이제 $S_y = \frac{\hbar}{2}\sigma_y$ 의 관계를 적용하고, $\xi(0) = \begin{pmatrix} a_0 = a(0) \\ b_0 = b(0) \end{pmatrix}$ 라고 놓으면, 이는 다음의 조건식이 된다.

$$\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

이는 $b_0 = i\, a_0$ 를 주고, $<\xi|\xi> = 1$ 의 규격화 조건에서 우리는 $\xi(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ 을 얻는다. 즉, $a_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $b_0 = \frac{i}{\sqrt{2}}$ 를 얻는다. 이를 앞서 구한 해에 대입하면 우리는 최종적으로 다음을 얻는다.

$$\xi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\Omega}{2}t} \\ i\, e^{i\frac{\Omega}{2}t} \end{pmatrix}$$

이 해는 스피너의 상태가 주기적으로 변하는 것을 보여준다. 여기서 주의해야 할 점은 얼핏

$\frac{\Omega}{2}T=2\pi$ 를 만족하는 $T=\frac{4\pi}{\Omega}$가 주기라고 생각하기 쉬우나, 실제로는 $\frac{\Omega}{2}T_0=\pi$ 를 만족하는 $T_0=\frac{2\pi}{\Omega}=\frac{T}{2}$가 실제 주기라는 것이다. 이는 시간 T가 지나는 동안 $S_y\,\xi=\frac{\hbar}{2}\,\xi$의 고유상태식을 만족하는 고유상태가 두 번 나타나기 때문이다. 그 하나는 원래 스피노와 동일한 $\xi(t=T)=\xi(0)$이고, 다른 하나는 반대 부호를 가진 $\xi(t=T_0)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}=-\xi(0)$ 이다. 이 두 상태 모두 고유상태식 $S_y\,\xi=\frac{\hbar}{2}\,\xi$ 을 동일하게 만족하기 때문에 우리는 물리적으로 동일한 상태라고 할 수 밖에 없다. 이는 어떤 고유상태에 상수를 곱하여도 그 고유값(물리적 측정치)이 바뀌지 않는 양자역학적 고유상태의 특성에 기인한다:

$A|\phi_a> \,=a|\phi_a> \;\Rightarrow\; A|c\,\phi_a>=c\,A|\phi_a> \,=\, c\,a|\phi_a>=a|c\phi_a>$, $c=$ 상수.

여기서 $t=0$ 일 때 전자의 스핀이 S_z 의 고유상태였다면 어떻게 될까? 이 경우 a_0 나 b_0 둘 중의 하나는 영이 되기 때문에 계속 동일한 고유상태에 있게 된다. 이는 해밀토니안이

$$H\xi=\mu_b\,\sigma_z B\xi\,=\frac{2\,\mu_b\,B}{\hbar}S_z\,\xi=\Omega S_z\,\xi$$

로 주어지므로 해밀토니안의 고유상태인 정상상태(stationary state)에 해당하기 때문이다. 즉, 시간이 흘러도 위상만 변할 뿐 동일한 고유상태를 유지하게 된다. 그리고 이러한 고유상태의 에너지는 다음과 같이 쉽게 구할 수 있다. 스피너를 $\xi=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$로 놓고, 시간에 무관한 슈뢰딩거 방정식 $H\xi=E\,\xi$ 에 $H=\frac{\hbar}{2}\Omega\,\sigma_z$ 를 대입하면 우리는 다음 식을 얻는다.

$$\frac{\hbar}{2}\Omega\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=E\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

위 식은 고유값 $E=\pm\frac{\hbar}{2}\Omega$를 주는데, $E=\frac{\hbar}{2}\Omega$일 때 고유상태는 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=|\alpha>$ 가 되어 스핀이 항상 $+z$ 방향을, $E=-\frac{\hbar}{2}\Omega$일 때 고유상태는 $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=|\beta>$ 가 되어 스핀이 항상 $-z$ 방향을 향한다.